Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2022»
Заключительный тур
13 марта 2022 года
9 класс

▷ **1.** Пусть $a_n = \sqrt{2022 + \sqrt{2022 + \sqrt{2022 + ... + \sqrt{2022}}}}$.
Число 2022 встречается в записи a_n n раз. Найдите целую часть числа a_{2022}.

Решение:

$$1936 = 44^2 < 2022 < 45^2 = 2025$$

$$44 < \sqrt{2022} < 45$$

$$45^2 < 2066 < 2022 + \sqrt{2022} < 2067 < 46^2 = 2116$$

$$[a_2] = 45$$

$$45 < a_3 = \sqrt{2022 + a_2} < 46$$

$$[a_3] = 45$$

$$...$$

$$[a_{2022}] = 45$$

Ответ: 45.

▷ **2.** Найти целочисленную функцию $A(\mu)$, удовлетворяющую условиям: $A(1) = 1$; $\alpha\beta = A(\alpha+\beta) - A(\alpha) - A(\beta)$.

Решение: Любое целое число можно выразить через функцию $A(\mu)$. В самом деле, при $\beta = 1$ имеем:

$$\alpha = A(\alpha+1) - A(\alpha) - A(1).$$

Учитывая, что $A(1) = 1$, имеем:

$$\alpha + 1 = A(\alpha+1) - A(\alpha)$$

Заменяя $\alpha = \mu - 1$, получаем:

$$\mu = A(\mu) - A(\mu - 1).$$

Полагая $\mu = 2, 3, ..., \alpha$, получим:

$$2 = A(2) - A(1)$$

$$3 = A(3) - A(2)$$

.....

.....

$$\alpha = A(\alpha) - A(\alpha - 1)$$

Сложив почленно, получим:

$$A(\alpha) = 1 + 2 + 3 + ... + \alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$$

Это условие является необходимым. Оно же и достаточно.
Положив в выражении

$$A(\alpha+\beta) - A(\alpha) - A(\beta)$$

$$A(\mu) = \frac{\mu(\mu+1)}{2},$$

получим (после преобразований)

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2} = \alpha\beta.$$

Следовательно,

$$A(\mu) = \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

▷ **3.** Найти сумму всех целых решений неравенства $x^4 \le 2x^2 + 4\underbrace{00...0}_{50}x + \underbrace{99...9}_{100}$.

Решение:

$$x^4 + 2x^2 + 1 \le 4x^2 + 4 \cdot 10^{50}x + 10^{100}$$

$$(x^2+1)^2 - (2x + 10^{50})^2 \le 0$$

$$(x^2 - 2x - \underbrace{99...9}_{50})(x^2 + 2x + 10^{50} + 1) \le 0$$

$$(x - 1\underbrace{0...0}_{24}1)(x + \underbrace{99...9}_{25}) \le 0$$

$$x \in \left[-\underbrace{99...9}_{25}; 1\underbrace{0...0}_{24}1\right]$$

$$S = 1\underbrace{0...0}_{25}+1\underbrace{0...0}_{24}1 = 2\underbrace{0...0}_{24}1$$

Ответ: $2\underbrace{0...0}_{24}1$.

▷ **4.** Отличные от нуля числа
$a_0, a_1, a_2, ..., a_{2022}$; $\quad b_0, b_1, b_2, ..., b_{2022}$; $\quad c_0, c_1, c_2, ..., c_{2022}$
таковы, что для любых действительных x справедливы равенства
$(a_1x+b_1)^2+...+(a_{2022}x+b_{2022})^2=(a_0x+b_0)^2$,
$(a_1x+c_1)^2+...+(a_{2022}x+c_{2022})^2=(a_0x+c_0)^2$.
Чему равна сумма квадратов $(c_1x+b_1)^2+...+(c_{2022}x+b_{2022})^2$?

Решение: Докажем, что требуемая сумма равна $(c_0x+b_0)^2$
Подставив $x=-\frac{b_0}{a_0}$ в первое тождество, получим

$$\sum_{i=1}^{2022}\left(-\frac{a_ib_0}{a_0}+b_i\right)^2=0,$$

откуда $b_i=\frac{a_ib_0}{a_0}$ для любого $i=1,...,2022$.
Аналогично при $x=-\frac{c_0}{a_0}$ из второго тождества получаем $c_i=\frac{a_ic_0}{a_0}$ для любого $i=1,...,2022$
Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2022}(c_ix+b_i)^2=\sum_{i=1}^{2022}\left(\frac{a_ic_0}{a_0}x+\frac{a_ib_0}{a_0}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{2022}a_i^2}{a_0^2}(c_0x+b_0)^2,$$

а поскольку при $x=1-\frac{b_0}{a_0}$ первое тождество дает равенство $\sum_{i=1}^{2022}a_i^2=a_0^2$, то

$$\sum_{i=1}^{2022}(c_ix+b_i)^2=(c_0x+b_0)^2,$$

что и требовалось доказать.

▷ **5.** Множество всех натуральных чисел от 1 до 2022 разбить а) на две группы с равными суммами; б) на три группы с равными суммами.

Решение:
$$\frac{1+...+2022}{2}\cdot 2022=1011\cdot 2023$$
Сумма нечетная, следовательно, на 2 не делится. Пункт а) нельзя разбить
б) приводим пример $S_1+S_2+S_3=1011\cdot 2023=3\cdot 337\cdot 2023$

$$\underbrace{1,...,337}_{S_1},\underbrace{338,...,674}_{S_2},\underbrace{675,...,1348}_{S_3},\underbrace{1349,...,1685}_{S_2},\underbrace{1686,...,2022}_{S_1}$$

$S_1=\frac{1+337}{2}\cdot 337+\frac{1686+2022}{2}\cdot 337=\frac{337}{2}(1+337+1686+2022)=337\cdot 2023$
$S_2=\frac{338+674}{2}\cdot 337+\frac{1349+1685}{2}\cdot 337=\frac{337}{2}(338+674+1349+1685)=337\cdot 2023$
$S_3=\frac{675+1348}{2}\cdot 674=337\cdot 2023$

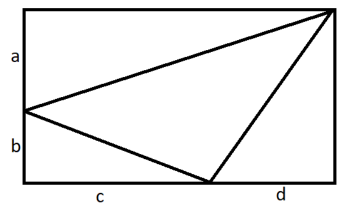
▷ **6.** Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число меньше его. Выиграет тот, кто получит 2022. Кто победит при правильной игре, если играют двое?

Решение: При любой игре второго игрока первый выиграет. Стратегия:

Число на доске	Ход первого	Число на доске	Ход второго
2	1	3	1x2
3+x	2y=4-x3	7	1x6
7+x	2y=8-x7	15	1x14
15+x	2y=16-x15	31	1x30
31+x	2y=32-x31	63	1x62
63+x	1y=63-x62	126	1x125
126+x	1y=126-x125	252	1x251
252+x	2y=253-x252	505	1x504
505+x	2y=506-x505	1011	1x1010
1011+x	1y=1011-x1010	2022	

▷ **7.** Пусть a, b, c и d – положительные рациональные числа. Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого равны $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, и его площадь выражается рациональным числом.

Решение:



$$S_\triangle=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}\left[a(c+d)+bc+(a+b)d\right]=\frac{1}{2}(ac+bc+bd)$$

▷ **8.** Найдите все такие пары квадратных трёхчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d, что корни второго трёхчлена – числа a и b, а корни первого трёхчлена – числа c и d.

Решение: Числа a, b, c, d должны, согласно теореме Виета, удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} c+d=-a; \\ cd=b; \\ a+b=-c; \\ ab=d. \end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений получаем равенство $b=d$. Если при этом $b=d=0$, то числа a и c могут быть любыми, удовлетворяющими равенству $c=-a$. Поэтому каждый трёхчлен вида x^2+ax составляет вместе с трёхчленом x^2-ax требуемую пару. Если же $b=d\neq 0$, то, получив из второго и четвёртого уравнений $a=c=1$, из первого и третьего находим $b=d=-2$. Следовательно, трёхчлен x^2+x-2 составляет вместе с равным ему ещё одну пару трёхчленов, удовлетворяющую условиям задачи.

▷ **9.** Доказать, что в любом многоугольнике есть по крайней мере две стороны a и b, такие что $1\leqslant \frac{b}{a}<2$.

Решение: Пусть длины сторон многоугольника в порядке убывания (но не обязательно в порядке обхода) равны $a_1, a_2, ..., a_n$, $a_1\geqslant a_2\geqslant ...\geqslant a_n$.
Предположим, что $\frac{a_i}{a_{i+1}}\geqslant 2$ при всех $i=1,2,...,n-1$.
Тогда

$$a_2\leqslant \frac{1}{2}a_1, a_1\leqslant \frac{1}{2^2}a_1, ..., a_n\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

$$u$$

$$\leqslant a_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)<a_1,$$

чего не может быть.

▷ **10.** Число $S(N)$ есть сумма цифр числа N. Пусть $a=S(2022^{2022})$, $b=S(a)$. Чему равно $c=S(b)$?

Решение:

$$2022^{2022}<(2^{11})^{2022}=2^{22242}=2^{3\cdot 7414}=8^{7414}<10^{7414}$$

$$7414<\underbrace{8000}_{\textit{количество цифр}}$$

$$a<72000$$

$$b\leqslant S(69999)=42$$

$$c\leqslant 12$$

$$(2022)^{2022}=(2025-3)^{2022}=9n+3^{2022}=9m$$

$$\begin{cases} c\,\vdots\, 9 \\ c\leqslant 12 \end{cases}\Rightarrow c=9$$

Ответ: $c=9$